Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière TSI

Le but de ce problème est de définir et d'étudier, de différentes manières, la constante d'Euler. Les quatre parties proposées sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Partie I -

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i},\ u_n = S_n - \ln n,\ v_n = S_{n-1} - \ln n.$$

I.A - Montrer que : $\forall x \in [0, 1[,\ x + \ln(1-x) \leq 0,\ x - \ln(1+x) \geq 0$.

I.B - Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera γ leur limite commune.

Montrer, de plus, que : $\forall n \geq 2, v_n \leq \gamma \leq u_n$.

I.C - En déduire une valeur approchée de γ à 10^{-1} près.

I.D - Posons : $\forall n \geq 2$,

$$w_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \frac{1}{n}.$$

Montrer que la série de terme général w_n est convergente et que l'on a :

$$u_p - \gamma = \sum_{n=p+1}^{n=+\infty} w_n.$$

I.E - Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout réel non nul t, on pose :

$$f(t) = \frac{1}{t}.$$

I.E.1) Soit g la fonction affine définie sur l'intervalle $[k-1, k]$ par :

$$g(k-1) = f(k-1),\ g(k) = f(k).$$

Calculer :

$$\int_{k-1}^{k} g(t)dt.$$

I.E.2) Montrer qu'il existe une et une seule fonction h, affine sur chaque intervalle $]-\infty, k-\frac{1}{2}[$, $[k-\frac{1}{2}, +\infty[$, telle que :

$$h(k-1) = f(k-1),\ h(k) = f(k),\ h'(k-1) = f'(k-1),\ h'(k) = f'(k).$$

I.E.3) Que peut-on dire de la continuité de h ?

I.E.4) Calculer :

$$\int_{k-1}^{k} h(t)dt.$$

I.F - Montrer que :

$$\forall t \in [k-1, k],\ h(t) \leq f(t) \leq g(t).$$

I.G - Etablir l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{8k^2} - \frac{1}{8(k-1)^2} \leq \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \leq \frac{1}{2(k-1)} + \frac{1}{2k}.$$

I.H - En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$, pour $n \geq 2$.

I.I - Donner une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Partie II -

II.A - Montrer l'égalité :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt.$$

II.B - En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}{x}dx$$

$$u_n = \int_0^1 \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)\frac{dx}{x} - \int_1^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{dx}{x}.$$

II.C - Démontrer les inégalités suivantes :

MA Sujets 2000/Bon à tirer/TSI MATH I 30/9/99/3 version du 16 mars 2000 15:34

II.C.1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$1 + x \leq e^x$.

II.C.2) $\forall x \in [0, n]$,

$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$.

II.C.3) $\forall x \in [0, n]$,

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

II.C.4) $\forall x \in [0, n]$,

$\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$.

N.B. : on pourra commencer par démontrer que :

$\forall u \in [0, 1], (1-u)^n - 1 + nu \geq 0$.

II.C.5) $\forall x \in [0, n]$,

$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}$.

II.D - Montrer que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$

converge et que l'on a :

$\gamma = \int_0^1 (1 - e^{-x}) \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

Partie III -

On pose : $\forall x > 0$,

$\varphi(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}$.

III.A - Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0 et bornée sur $\mathbb{R}+$.

III.B - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx$ est convergente.

III.C - On pose, pour $n \geq 2$:

$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$.

Montrer que $I_n(a)$ existe, pour tout $a > 0$, et que l'on a :

$\forall a > 0$, $I_n(a) = \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x} dx = \ln n - \int_a^{na} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$.

III.D - Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ est convergente et que l'on a :

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln n$.

III.E - Montrer que :

$v_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx}) \varphi(x) dx$.

III.F - En déduire que :

$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x} \varphi(x) dx$.

Partie IV -

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

Soit ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$, considérée comme endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV.A - Déterminer $\operatorname{Ker} \phi$, $\operatorname{Ker} \phi_n$, $\operatorname{Im} \phi_n$, $\operatorname{Im} \phi$.

IV.B - Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_p de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$\phi(P_p)(X) = X^p$, $P_p(0) = 0$.

IV.C - Soit, pour $p \geq 1$, $Q_p(X) = P'_p(X) - P'_p(0)$.

IV.C.1) Calculer $\phi(Q_p)$.

IV.C.2) En déduire l'égalité :

$Q_p(X) = p \cdot P_{p-1}(X)$, $\forall p \geq 1$.

IV.D - Déterminer les polynômes P_p, pour $0 \leq p \leq 5$.

IV.E - Montrer que :

$\forall x \in [0, 1]$, $-\frac{1}{128} \leq P_5(x) \leq 0$.

IV.F - Pour k , $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_p(k) = \int_0^1 \frac{pP_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}} dt .$$

IV.F.1) Déterminer une relation de récurrence entre $I_p(k)$ et $I_{p+1}(k)$.

IV.F.2) Calculer $I_1(k)$.

IV.F.3) Donner une expression de $I_6(k)$ en fonction de $I_1(k)$.

IV.F.4) Etablir les inégalités suivantes :

$$-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6}\right) \leq I_6(k) \leq 0 .$$

IV.F.5) A l'aide de la question I.D, en déduire un encadrement de $u_n - \gamma$.

IV.F.6) Donner les dix premières décimales de γ.

••• FIN •••

MA Sujets 2000 Bon à tirer-TSI MATH I 30-9-99-3 version du 16 mars 2000 15:34